

Демонстрационный вариант

1. Пусть A — матрица размера 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

B — линейный оператор, осуществляющий поворот на 90 градусов против часовой стрелки, C — матрица оператора B в базисе, состоящем из столбцов матрицы A . Найдите матрицу C .

2. Пусть линейный оператор $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задается в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

а) Вычислите размерности подпространств $\dim(\ker(B))$, $\dim(\ker(B^2))$. б) Найдите собственные значения оператора B .

3. Известно, что для непрерывной функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x + y) = f(x)f(y) + f(x) + f(y)$. Пусть $f(1) = 1$. Чему равно $f(a)$ при положительном a ?

4. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзь и король) на первой линии шахматной доски так, чтобы слоны стояли на клетках разного цвета, а король стоял между двумя ладьями (не обязательно вплотную к ним)?

5. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность распределения

$$p(x, y) = 2x \cdot I_{0 \leq x \leq 1, |y| < x^2}$$

(в формуле через I обозначен индикатор). Найдите плотность распределения случайной величины $\xi + \eta$ и её математическое ожидание.

6. На окружности выбраны n точек, образующие вершины правильного n -угольника и пронумерованные числами $1, \dots, n$, в порядке по часовой стрелке. Некоторые пары точек соединены хордами. Конфигурация хорд называется *правильной*, если никакая пара хорд не имеет общих точек, кроме, возможно, концов. Опишите на известном Вам языке программирования¹ алгоритм, который по входной последовательности пар номеров соединённых хордами точек определял бы, является ли соответствующая конфигурация правильной, и оцените его сложность по времени и по памяти.

Два примера входных данных, задающих соответственно неправильную и правильную конфигурации, приведены ниже. Вначале подаётся число n , затем количество хорд, затем пары номеров концов хорд.

5
3
1 2
2 4
3 5

6
4
1 2
1 6
2 4
5 6

¹Не обязательно приводить код полностью, достаточно «псевдокода».